МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА
У БЕОГРАДУ

МАТУРСКИ РАД

из предмета Нумеричка математика

ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ И КВАДРАТУРНЕ ФОРМУЛЕ СА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈОМ У MATLABU

Ученик:
Никола Недељковић, 4д

Ментор:
др Александар Пејчев

Београд, јун 2015.

Садржај

Увод

Овај рад је настао као продукт одређених старих афинитета према полиномима још кроз доба изучавања истих у школи, и нових овогодишњих афинитета према предмету Нумеричка математика. Ова тема, такорећи, феноменално спаја ова два у један јако моћан резултат.

Трудио сам се да рад буде разумљив и да за његово читање не буде потребно огромно предзнање. Велики број теорема је доказан и све је поступно изложено. Ипак, за разумевање рада од предзнања потребно је основно знање о полиномима, као и знање о интерполацији.

У првој глави изложена је основна теорија ортогоналних полинома. У другој глави постепено су изведене уопштене Њутн-Котесове квадратурне формуле као увод у Гаус-Кристофелове, где је доказана централна теорема која повезује прве две главе. Затим су у трећем делу *Примери и примене* дати примери за већи део ствари показаних у прве две теоријске главе. У четвртој глави дат је модернији приступ нумеричком израчунавању кроз имплементацију у $MATLAB$ софтверу.

На крају, исказујем захвалност ментору, *др Александру Пејчеву* за помоћ при писању рада, доступност и сугестије како би рад био бољи и лепши.

Београд, јуна 2015. *Никола Недељковић*

1. Ортогонални полиноми

Ортогонални полиноми су од великог значаја у нумеричкој математици и имају примену у разним гранама математике, физике и осталим примењеним наукама. Они се могу увести на различите начине, а овде ће то бити урађено преко момент-функционеле. У делу *Примери и примене* биће наведени неки од класичних ортогоналних полинома. Постоје нпр. и дискретни ортогонални полиноми, као и полиноми ортогонални на полукругу (видети у [1]). У овом делу биће изложено неколико најбитнијих теорема којим ћемо се користити при увођењу ортогоналних полинома у квадратурне формуле.

Дефиниција 1.1. Функција $p(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) је тежинска функција ако је она на том интервалу ненегативна, интеграбилна и њен интеграл је позитиван и коначан. Ако је интервал (a, b) бесконачан, за тежинску функцију $p(x)$ потребно је да апсолутно конвергирају интеграли

$$C_k = \int_a^b x^k p(x)\ dx,$$

за $k = 1, 2, ...$ Интеграле C_k називамо **моментима** тежинске функције p.

Дефиниција 1.2. Функцију две промењиве δ_{kn} зовемо Кронекеровом делта функцијом и она узима вредност 1 за $k = n$ и 0 у супротном.

Дефинишимо сада ортогоналне полиноме. Наиме, нека је $\mathcal{P}$ линеарни простор свих алгебарских полинома над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$, $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ низ комплексних бројева и $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ функционела дефинисана помоћу:

1. $\mathcal{L}[x^k] = C_k,\ (k = 0, 1, 2, ...)$;
2. $\mathcal{L}[\alpha P(x) + \beta Q(x)] = \alpha\mathcal{L}[P(x)] + \beta\mathcal{L}[Q(x)] \quad (\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C};\ \forall P, Q \in \mathcal{P})$.

Тада се каже да је $\mathcal{L}$ **момент-фунционела** одређена моментним низом $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, а за C_k се каже да је момент реда k.

Дефиниција 1.3. Низ полинома $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ је ортогоналан у односу на момент-функционелу $\mathcal{L}$ ако је

1^0 $\deg Q_k = k$;

2^0 $\mathcal{L}[Q_k(x)Q_n(x)] = 0\ (k \neq n)$;

3^0 $\mathcal{L}[(Q_k(x))^2] \neq 0$,

за свако k, $n \in \mathbb{N}_0$.

Услови 2^0, 3^0 у претходној дефиницији могу бити замењени условом

$$\mathcal{L}[Q_k(x)Q_n(x)] = K_n\delta_{kn},$$

при чему је $K_n \neq 0$.

Специјално низ полинома ортогоналан у односу на момент-функционелу дефинисану са

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b p(x)f(x)\ dx, \tag{1}$$

где је $f \in \mathcal{P}$, а p тежинска функција ће нам бити од великог значаја у нумеричкој интеграцији.

Теорема 1.1. Нека је $\mathcal{L}$ момент-функционела и $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ низ полинома. Тада су следећа три тврђења међусобно еквивалентна:

1. низ $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ је ортогоналан у односу на $\mathcal{L}$;
2. $\mathcal{L}[P(x)Q_n(x)] = 0$ за сваки полином P степена $m < n$ и $\mathcal{L}[P(x)Q_n(x)] \neq 0$ ако је $m = n$;
3. $\mathcal{L}[x^mQ_n(x)] = K_n\delta_{mn}$, где је $K_n \neq 0$ $(m = 0, 1, ..., n)$.

Доказ. Докажимо прво $1 \Rightarrow 2$. Претпоставимо да важи 1. Како је $\deg Q_k = k$, то се полином степена m може представити као линеарна комбинација полинома $Q_0, Q_1, \dots Q_m$, тј. важи

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k Q_k(x),$$

где је P полином степена m, па је самим тим и $\alpha_m \neq 0$. Тада, с обзиром на линеарност момент-функционеле $\mathcal{L}$, имамо

$$\mathcal{L}[P(x)Q_n(x)] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \mathcal{L}[Q_k(x)Q_n(x)] = 0$$

за $m < n$ и

$$\mathcal{L}[P(x)Q_n(x)] = \alpha_n \mathcal{L}[(Q_n(x))^2] \neq 0$$

за $m = n$, због $\alpha_m \neq 0$. Импликација $2 \Rightarrow 3$ се добија стављајући $P(x) = x^m$. Докажимо сада $3 \Rightarrow 1$. Нека је $k < n$ и $Q_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k, a_k \neq 0$. Сада је

$$\mathcal{L}[Q_k(x)Q_n(x)] = \sum_{i=0}^{k} a_i \mathcal{L}[x^iQ_n(x)] = 0$$

због $\mathcal{L}[x^i Q_n(x)] = 0$ $(i = 0, ..., k)$. Такође је $\mathcal{L}[Q_n(x)Q_n(x)] = a_n K_n \neq 0$, чиме је доказ завршен. $\square$

Поставља се питање егзистенције низа полинома $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ који је ортогоналан у односу на момент-функционелу $\mathcal{L}$, тј. њен моментни низ $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. На то питање одговор даје следећа теорема.

Теорема 1.2. Потребни и довољни услови за егзистенцију низа ортогоналних полинома у односу на момент-функционелу $\mathcal{L}$ су

$$\Delta_k \neq 0$$

за $k = 1, 2, ...$, где је

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & ... & C_{k-1} \\ C_1 & C_2 & ... & C_k \\ \vdots & & & \\ C_{k-1} & C_k & ... & C_{2k-2} \end{vmatrix} \tag{2}$$

тзв. момент детерминанта.

Доказ. Нека је $Q_n(x) = q_{n0} + q_{n1}x + \cdots + q_{nn}x^n$. На основу тврђења 3. у *Теореми 1.1.* услови ортогоналности се могу исказати у облику

$$\mathcal{L}[x^m Q_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} q_{nk} C_{k+m} = K_n \delta_{mn}, \tag{3}$$

где је $K_n \neq 0$, а m узима вредности $0, 1, ..., n$, што је заправо еквивалентно систему линеарних једначина

$$\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & ... & C_{k-1} \\ C_1 & C_2 & ... & C_k \\ \vdots & & & \\ C_{k-1} & C_k & ... & C_{2k-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{n0} \\ q_{n1} \\ \vdots \\ q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где је $k = n + 1$.
Ако претпоставимо да низ ортогоналних полинома у односу на $\mathcal{L}$ егзистира, тада је он јединствено одређен константама K_n у (3), што значи да систем једначина (4) има јединствено решење. Ако би било $\Delta_k = 0$, онда би по Крамеровом правилу систем једначина (4) имао или нула или бесконачно много решења (контрадикција). Одатле закључујемо да је $\Delta_{n+1} \neq 0$ $(n \geq 0)$.
Обрнуто, ако је $\Delta_k \neq 0$ $(k \geq 1)$, тада за произвољно $K_n \neq 0$ систем једначина (4) има јединствено решење, што значи да полином Q_n,

који задовољава (3) егзистира. Коришћењем Крамеровог правила и Лапласовог развоја по k-тој колони добијамо

$$q_{nn} = K_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \neq 0$$

за $n \geq 1$ и $q_{00} \neq 0$, закључујемо да је $\deg Q_k = k$, што заједно са претходним доказује да је $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ низ ортогоналних полинома у односу на $\mathcal{L}$. Приметимо да је низ $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ јединствен до на константу K_n (за сваки полином). $\square$

Ограничимо се сада на момент-функционелу (1). Нека је $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ низ ортогоналних полинома у односу на момент-функционелу (1), тј. ортогоналан са тежинском функцијом p на (a,b).

Теорема 1.3. Све нуле полинома Q_k су реалне, различите и припадају интервалу (a,b).

Доказ. Како је, због ортогоналности,

$$\mathcal{L}[Q_k(x)Q_0(x)] = \int_a^b p(x)Q_k(x)Q_0(x)\ dx = 0,$$

за $k \geq 1$ (за $k=0$ полином нема нула), а $Q_0(x)$ је константа и $Q_0(x) \neq 0$ (ако би било $Q_0(x) = 0$, онда би било $\mathcal{L}[(Q_0(x))^2] = \mathcal{L}[0] = 0$), онда је и

$$\int_a^b p(x)Q_k(x)\ dx = 0.$$

Дакле, полином Q_k мења знак бар у једној тачки из интервала (a,b), тј. има бар једну реалну нулу непарног реда у (a,b). Нека су $x_1, ..., x_m$ ($m \leq k$) све реалне нуле непарног реда полинома Q_k, које леже у (a,b). Дефинишимо полином P помоћу

$$P(x) = Q_k(x)\omega(x),$$

где је $\omega(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_m)$. Како се полином $\omega(x)$ може представити у облику

$$\omega(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i Q_i(x),$$

имамо

$$\int_a^b p(x)P(x)\ dx = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \Big(\int_a^b p(x)Q_k(x)Q_i(x)\ dx \Big) = \alpha_k K_k \delta_{mk},$$

тј. ако је $m < k$, добијамо $\int_a^b p(x)P(x)\ dx = 0$, што је немогуће са обзиром на то да $P(x)$ не мења знак на (a,b). Самим тим мора бити

$m = k$ чиме је доказ завршен. $\square$

Теорема 1.4. Између три узастопна полинома у низу $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ постоји рекурентна релација

$$Q_{k+1}(x) - (\alpha_k x + \beta_k)Q_k(x) + \gamma_k Q_{k-1}(x) = 0$$

где су α_k, β_k, γ_k константе.

Доказ. Изаберимо α_k такво да је полином R дефинисан помоћу $R(x) = Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x)$ степена k. Представљањем полинома R као линеарне комбинације полинома $Q_0, Q_1, ..., Q_k$ добијамо

$$Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x) = \beta_k Q_k(x) - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j Q_{j-1}(x).$$

Множењем ове једнакости редом са Q_i, $0 \leq i \leq k-2$, и примењивањем момент-функционеле $\mathcal{L}$ на њу закључујемо редом да је $\gamma_j = 0$, $(j = 1, ..., k-1)$. Сада се наша једнакост своди на почетну. $\square$

Може се доказати и обрнуто тврђење. Наиме, ако низ полинома задовољава ову трочлану рекурентну релацију, тада постоји интервал (a, b) и тежинска функција p у односу на коју је овај низ полинома ортогоналан на (a, b). Ово нам даје неки поглед на то како конструишемо одговарајући низ ортогоналних полинома $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$.

2. Квадратурне формуле

Познато је да одређени интеграл функције рачунамо по Њутн-Лајбницовој формули као

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a),$$

где је F примитивна функција функције f. Ипак, у многим случајевима није могуће применити Њутн-Лајбницову формулу. На пример, ако подинтегрална функција f није задата аналитичким изразом $f(x)$, већ паровима вредности $\big(x_i, f(x_i)\big)$, или као што је случај са рачунањем интеграла:

$$\int_a^b e^{-x^2}\ dx,\ \int_a^b \frac{sinx}{x}\ dx,\ \int_a^b cos(x^2)\ dx.$$

где функција F не може да се представи помоћу коначног броја елементарних функција. Такође, може да се деси да Њутн-Лајбницова формула доводи до врло сложеног израза, чак и код израчунавања интеграла једноставнијих функција, на пример

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^3} = log\big(|a+1|^{1/3}\big) - \frac{1}{6}log(a^2-a+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{a\sqrt{3}}{2-a}.$$

Ограничења која се јављају код примене аналитичких метода за рачунање одређених интеграла превазилазе се увођењем нумеричких метода. Формуле помоћу којих се врши нумеричко израчунавање одређених интеграла називамо **квадратурним формулама**.
Општа идеја на којој се заснивају методи нумеричке интеграције је апроксимирање једне функције другом, тј. ако $f(x)$ апроксимирамо са $g(x)$, онда је

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b g(x)\ dx = I(g).$$

Ако је g интерполациони полином, одговарајућа квадратурна формула назива се интерполациона.

2.1. Њутн-Котесове квадратурне формуле

Нека је $f : [a,b] \to \mathcal{R}$, и нека је $h = \frac{b-a}{n}$. Формирајмо равномерну поделу одсечка $[a,b]$ са кораком h,

$$x_0 = a;\ x_i = x_0 + ih,\ i = 1, ..., n.$$

Овако смо добили $n+1$ тачака, које су нам чворови интерполације функције f полиномом $P_n(x)$ (који је јединствен), тј. важи

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где је

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n) \tag{5}$$

грешка интерполације, а $\xi_x \in (a,b)$. Сада је (због непрекидности $f(x)$ и $P_n(x)$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\ dx + \int_a^b R_n(x)\ dx.$$

Добили смо квадратурну формулу

$$Q_n(f) = \int_a^b P_n(x)\ dx, \tag{6}$$

а грешка те квадратурне формуле је

$$E_n(f) = \int_a^b R_n(x)\ dx. \tag{7}$$

За различите вредности за n добијају се квадратурне формуле различитог степена тачности (у смислу реда величине грешке). Размотрићемо неколико специјалних случајева у којима ћемо у својству полинома P_n користити први Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима (може се користити и Лагранжов),

$$P_n(x) = P_n(x_0+sh) = y_0+\Delta y_0 s+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1)+...+\frac{\Delta^n y_0}{n!}s(s-1)\dots(s-n+1),$$

где је h корак поделе, а $\Delta^k y_0$ коначна разлика реда k.

Напомена: Коначне разлике се дефинишу као:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i;\ \ \Delta^0 y_i = y_i = f(x_i).$$

Правило правоугаоника

У овом случају $n=0$, тј. имамо само један чвор интерполације, па је

$$P_n(x) = P_0(x) = y_0 = f(x_0) = f(a)$$

,тј.

$$Q_{01}(f) = \int_a^b f(a)\ dx = f(a)(b-a) \tag{8}$$

Ово правило зовемо правилом левих правоугаоника Можемо нпр. узети за чвор интерполације десни крај интервала b, или средину интервала $\frac{a+b}{2}$, па редом добијамо $Q_{02}(f) = f(b)(b-a)$ и $Q_{03}(f) = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$, што су редом правила десних и средњих правоугаоника.

Трапезно правило

У овом случају $n = 1$, тј. имамо два чвора интерполације, па је

$$P_n(x) = P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 s,$$

за који је

$$\int_a^b P_1(x)\,dx = \int_0^1 P_1(x_0 + sh)h\,ds = h\int_0^1 (y_0 + \Delta y_0 s)\,ds = h\left(y_0 + \frac{\Delta y_0}{2}\right)$$
$$= h\left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a), \text{ тј.}$$

$$Q_1(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a), \tag{9}$$

што је управо површина трапеза одређеног са чворовима $x_0 = a$,$x_1 = b$ и тачкама $\big(x_0, f(x_0)\big)$,$\big(x_1, f(x_1)\big)$, што се и могло очекивати с обзиром на то да је Њутнов интерполациони полином првог степена линеарна функција која пролази кроз ове две тачке.

Симпсоново правило

У овом случају $n = 2$, тј. имамо 3 чвора интерполације $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, па је

$$P_n(x) = P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1).$$

Тада на сличан начин као и за претходно правило добијамо

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \int_0^2 P_2(x_0 + sh)h\,ds = h\int_0^2 \Big(y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1)\Big)\,ds$$
$$= \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big), \text{ тј.}$$

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big) \tag{10}$$

У овом случају, како је Њутнов интерполациони полином трећег степена, $Q_2(f)$ је управо површина испод параболе која пролази кроз тачке $\big(x_0, f(x_0)\big)$,$\big(x_1, f(x_1)\big)$,$\big(x_2, f(x_2)\big)$.

2.1.1. Грешке Њутн-Котесових квадратурних формула

Теорема 2.1. Нека је $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ непрекидна функција и нека је функција $g : [a,b] \to \mathcal{R}$ сталног знака на $[a,b]$. Тада постоји $\xi \in [a,b]$ такво да је

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\ dx.$$

Доказ. Нека је без губљења општости $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Како је f непрекидна на $[a,b]$, она на том интервалу узима свој максимум $M = f(x_{max})$ и минимум $m = f(x_{min})$. Дефинишимо функцију

$$F(z) = f(z)\int_a^b g(x)\ dx.$$

Сада важи

$$F(x_{min}) = f(x_{min})\int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b f(x_{min})g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

и

$$F(x_{max}) = f(x_{max})\int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b f(x_{max})g(x)\ dx \geq \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

Како је $F(z)$ непрекидна на $[a,b]$, уз претходна два услова добијамо да $(\exists\xi \in [a,b])\ F(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$, чиме је доказ завршен. □

Теорема 2.2. Нека је $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ непрекидно диференцијабилна функција на $[a,b]$. Тада постоји $\eta \in [a,b]$ тако да за грешку $E_{01}(f)$ правила левих правоугаоника (8) важи

$$E_{01}(f) = \frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta). \tag{11}$$

Доказ. На основу (5) и (7) је $R_0(x) = f'(\xi_x)(x-a)$ и

$$E_{01}(f) = \int_a^b R_0(x)\ dx = \int_a^b f'(\xi_x)(x-a)\ dx. \tag{12}$$

Како је f' непрекидна функција и $x-a$ не мења знак на $[a,b]$, применивши *Теорему 2.1.* на (12) добијамо

$$E_{01}(f) = f'(\eta)\int_a^b (x-a)\ dx = f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2}$$

за неко $\eta \in [a, b]$. $\square$

Грешка правила левих правоугаоника је у општем случају јако велика. Сада уводимо једну дефиницију којом ћемо се доста користити.

Дефиниција 2.1. Квадратурна формула $Q_n(f)$ (6) је алгебарског степена тачности m ако је $E_n(x^k) = 0$ за $k = 0, ..., m$ и $E_n(x^{m+1}) \neq 0.$, тј. ако је она тачна за све $f(x) = x^k$ где $k = 0, ..., m$ и није тачна за $f(x) = x^{m+1}$.

Приметимо да је $E_{01}(f) = 0$ за све полиноме нултог степена, тј. да је формула (8) правила левих правоугаоника тачна за све константе. То се и могло очекивати с обзиром на то да је Њутнов интерполациони полином у том случају заправо нултог степена.

Приметимо такође да је формула (6) тачна за све полиноме n-тог или мањег степена, јер, како смо ту интерполирали у $n+1$-ом чвору, Њутнов интерполациони полином полинома степена мањег или једнаког n је исти тај полином, тј. алгебарски степен тачности квадратурне формуле $Q_n(f)$ је бар n.

Теорема 2.3. Нека је $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ два пута непрекидно диференцијабилна функција на $[a, b]$. Тада за грешку квадратурне формуле (9) важи

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \tag{13}$$

за неко $\eta \in [a, b]$.

Ова теорема се доказује слично као претходна такође применом *Теореме 2.1.* На наредну теорему се не може тако лако применити *Теорема 2.1.* због тога што одговарајућа функција мења знак на задатом интервалу. За потпун доказ ове и наредне теореме погледати [3].

Теорема 2.4. Нека је $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ четири пута непрекидно диференцијабилна функција на $[a, b]$. Тада за грешку квадратурне формуле (10), тј. Симпсоновог правила важи

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\eta) \tag{14}$$

за неко $\eta \in [a, b]$.

Четврти извод овде настаје као продукт Лагранжове теореме о средњој вредности. Одавде видимо да је алгебарски степен тачности

Симпсоновог правила за 1 већи од очекиваног, тј. иако је Њутнов интерполациони полином другог степена, формула (10) важи и за полиноме трећег степена, пошто је за њих $E_2(f) = 0$. Ово је разлог због којег се Симпсонова формула често користи у нумеричкој интеграцији.

2.1.2. Уопштене квадратурне формуле Њутн-Котесовог типа

Као што видимо из претходно изведених формула за грешке код правила правоугаоника, трапеза и Симпсоновог, грешка се повећава како се дужина интервала $[a, b]$ повећава. Ову грешку можемо смањити поделом овог интервала $[a, b]$ на мање подинтервале, и примењивањем одговарајућих правила на сваки од њих појединачно.

Теорема 2.5. Нека је $g : [a, b] \to \mathcal{R}$ непрекидно диференцијабилна функција и нека су константе c_i, $i = 1, ..., n$ истог знака. Ако $t_i \in [a, b]$, $i = 1, ..., n$, онда постоји $\eta \in [a, b]$ такво да је

$$\sum_{i=1}^{n} c_i g'(t_i) = g'(\eta) \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Доказ ове теореме је сличан као доказ Теореме 2.1.

Направимо опет равномерну поделу интервала интеграције $[a, b]$ са кораком h, тј.

$$x_0 = a;\ x_i = x_0 + ih,\ i = 1, ..., n$$

где је $h = \frac{b-a}{n}$. Из (11) и (8) добијамо

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$$

Применимо ту формулу на сваки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, ..., n-1$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \Big) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Big(f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &\quad + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} f'(\eta_i) \Big) \\ &= h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\eta_i).\end{aligned}$$

.

Дакле, за вредност интеграла добијеног правилом левих правоугаоника узимамо

$$I_P = h[f(x_0) + ...f(x_{n-1})], \tag{15}$$

док за грешку примењујући *Теорему 2.5.* добијамо

$$|E(I_P)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1, \tag{16}$$

где је $M_1 = max|f'(x)|$ на $[a, b]$.

Аналогно примењујући правило трапеза добијамо

$$I_T = \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big], \tag{17}$$

$$|E(I_T)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

где је $M_2 = max|f''(x)|$ на $[a, b]$. Код Симпсоновог правила имамо 3 чвора интерполације, тј. 2 подинтервала, па у овом случају број подинтервала мора бити паран, тј. $n = 2m$. Слично као и у претходна два случаја добијамо

$$I_S = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + f(x_{2m}) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\Big], \tag{18}$$

$$|E(I_S)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4,$$

где је $M_4 = max|f^{(IV)}(x)|$ на $[a, b]$. Формуле (15), (17) и (18) редом се називају уопштено правило левих правоугаоника, уопштено трапезно правило и уопштено Симпсоново правило. Овим смо завршили излагање о Њутн-Котесовим квадратурним формулама.

2.2. Интерполационе квадратурне формуле

Сада ћемо мало формалније дефинисати интерполационе квадратурне формуле. Нека су дате тачке $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. За те тачке апроксимирајмо функцију $f(x)$ Лагранжовим интерполационим полиномом n-тог степена $P_n(x)$, где је

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x), \quad L_k(x) = \prod_{j=0;j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} = \frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)},$$

и $w_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$. Сада важи

$$\int_a^b p(x)f(x)\ dx \approx \int_a^b p(x)P_n(x)\ dx = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k)\int_a^b p(x)L_k(x)\ dx\right),$$

$$\int_a^b p(x)f(x)\ dx \approx \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \tag{19}$$

где су C_k тежински коефицијенти, а $p(x)$ тежинска функција дефинисана у првом делу рада,

$$C_k = \int_a^b \frac{p(x)w_{n+1}(x)}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)}. \tag{20}$$

Дефиниција 2.2. Квадратурна формула облика (19) у којој се тежински коефицијенти C_k рачунају по формули (20) назива се интерполациона квадратурна формула.

Приметимо да су формуле правила правоугаоника, трапеза и Симпсоновог правила интерполационе.

Теорема 2.6. Квадратурна формула облика (19) је интерполациона ако и само ако је тачна за све полиноме закључно са степеном n.

Доказ. ($\Rightarrow$): Ако је квадратурна формула облика (19) интерполациона, онда она и мора бити тачна за све полиноме степена мањег или једнаког n, зато што је Лагранжов интерполациони полином таквих полинома исти тај полином.
($\Leftarrow$): Претпоставимо сада да имамо квадратурну формулу облика

$$\int_a^b p(x)f(x)\ dx \approx \sum_{k=0}^{n} d_k f(x_k)$$

и нека је она тачна за све полиноме закључно са степеном n. Докажимо да се тежински коефицијенти d_k рачунају по формули (20). Посматрајмо полиноме

$$L_k(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_k)w'_{n+1}(x_k)}, \quad k = 0, ..., n.$$

Како су они степена n, за њих је претходна формула тачна, тј. важи

$$\int_a^b p(x)L_k(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} d_i L_k(x_i) = d_k.$$

С друге стране, на основу (20) имамо $C_k = \int_a^b p(x)L_k(x)\ dx$, па је коначно $d_k = C_k$ за $k = 0, ..., n$. $\square$

2.3. Гаус-Кристофелове квадратурне формуле

До сада смо се бавили оптималним одређивањем коефицијената C_k за интерполационе квадратурне формуле које смо доказали у *Теореми 2.6.*, и показали да су такве формуле алгебарског степена тачности бар n. На побољшање степена тачности можемо утицати и избором чворова x_i $(i = 1, ..., n)$, којима морају одговарати стандардни тежински коефицијенти C_k (20). Управо Гаус-Кристофелове квадратурне формуле интерполационог типа поседују максималан алгебарски степен тачности. Оне имају облик

$$\int_a^b p(x)f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f). \tag{21}$$

Прве идеје о оваквим квадратурама потичу од Њутна (1676). Котес је независно од Њутна користио сличне идеје. Ослањајући се на њихове радове и свој рад о хипергеометријским развојима из 1812. године, К.Ф.Гаус је 1814. развио фамозни метод за интеграцију, који значајно побољшава дотад познате Њутн-Котесове формуле. У току 19. века Гаусове квадратуре су детаљније разрађивали и даље развијали Ф.Г.Мехлер (1864), Е.Б.Кристофел (1858) и други.

Постоје нпр. и квадратурне формуле које користе и вредности неколико првих извода функције у својим чворовима. Оне могу постићи чак и већу тачност од Гаус-Кристофелових.

Дефиниција 2.2. Квадратурна формула облика (21) је Гаусова ако су, за унапред задати број чворова n, тежински коефицијенти $A_1, ..., A_n$

и чворови $x_1, ..., x_n$ одабрани тако да формула поседује максимални алгебарски степен тачности.

Сада ћемо доказати да је тај максимални алгебарски степен тачности заправо $2n-1$ који је очигледно већи од степена тачности Њутн-Котесових формула.

Теорема 2.7. Алгебарски степен тачности квадратурне формуле (21) није већи од $2n-1$.

Доказ. Претпоставимо супротно. То значи да је квадратурна формула (21) тачна за све полиноме x^k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Због линеарности интеграла и формуле (21), она је тачна и за све полиноме $2n-$тог степена. Нека је

$$w_n(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n),$$

онда је $w_n^2(x)$ полином $2n-$тог степена за који је

$$\int_a^b p(x) w_n^2(x)\ dx > 0,$$

док је, према формули (21),

$$\int_a^b p(x) w_n^2(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} A_k w_n^2(x_k) = 0. \ \Box$$

Сада ћемо показати да постоји одабир чворова за који се степен тачности $2n-1$ може постићи. Наредна теорема је јако битна и ослања се на неколико већ доказаних теорема. Нека је $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ низ полинома ортогоналан у односу на момент-функционелу (1). Са $\mathcal{P}_m$ означаваћемо скуп свих полинома максималног степена m.

Теорема 2.8. Интерполациона квадратурна формула (21) има алгебарски степен тачности $2n-1$, ако и само ако су x_k $(k = 1, \ldots, n)$ нуле полинома $Q_n(x)$.

Доказ. Нека су x_k $(k = 1, \ldots, n)$ нуле полинома $Q_n(x)$ које су према *Теореми 1.3.* реалне, просте и припадају (a, b). Нека је, даље, f произвољан полином из $\mathcal{P}_{2n-1}$. Дељењем f са $Q_n(x)$ добијамо

$$f(x) = Q_n(x) u_{n-1}(x) + v_{n-1}(x), \tag{22}$$

где су u_{n-1} и v_{n-1} полиноми из $\mathcal{P}_{n-1}$. Имамо

$$\int_a^b p(x) f(x)\ dx = \int_a^b p(x) Q_n(x) u_{n-1}(x)\ dx + \int_a^b p(x) v_{n-1}(x)\ dx, \text{ тј.} \tag{23}$$

$$\int_a^b p(x)f(x)\;dx = \int_a^b p(x)v_{n-1}(x)\;dx,$$

с обзиром на то да је први интеграл на десној страни у једнакости (23) једнак нули према *Теореми 1.1.* Како је по *Теореми 2.6.* формула (21) тачна за све полиноме из $\mathcal{P}_{n-1}$

$$\int_a^b p(x)v_{n-1}(x)\;dx = \sum_{k=1}^{n} A_k v_{n-1}(x_k), \text{ а}$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k v_{n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

јер се убацивањем x_k у (22) добија $f_{n-1}(x_k) = v_{n-1}(x_k)$, то је и

$$\int_a^b p(x)f(x)\;dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

па формула (21) има алгебарски степен тачности $2n-1$.
Докажимо сада обрнуто тврђење. Нека квадратурна формула (21) има алгебарски степен тачности $2n-1$. Помоћу $x_1, ..., x_n$ конструишимо полином Q_n, такав да је

$$Q_n(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

и посматрајмо интеграл

$$I_m = \int_a^b p(x)x^m Q_n(x)\;dx \quad (m = 0, 1, ..., n-1).$$

Како је $x^m Q_n(x)$ полином степена $n+m$, тј. $x^m Q_n(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}$, имамо

$$I_m = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^m Q_n(x_k) = 0 \quad (m = 0, 1, ...n-1),$$

одакле закључујемо да је низ полинома $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ортогоналан на (a, b) са тежинском функцијом $p(x)$. $\square$

Сада за коефицијенте A_k имамо $(w_n(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n))$

$$A_k = \int_a^b \frac{p(x)w_n(x)}{(x-x_k)w_n'(x_k)}dx = \frac{1}{Q_n'(x_k)}\int_a^b \frac{p(x)Q_n(x)}{x-x_k}dx \;\; (k = 1, .., n), \tag{24}$$

због $w_n(x) = \frac{Q_n(x)}{a_n}$. Може се показати (користећи Хермитов интерполациони полином) да је грешка Гаусових квадратурних формула

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!a_n^2}\int_a^b p(x)Q_n(x)^2\;dx \;\; (a < \xi < b), \tag{25}$$

где је a_n водећи коефицијент у $Q_n(x)$.

3. Примери и примене

Пример 1. Дељењем интервала интеграције на 10 једнаких делова израчунати приближну вредност интеграла

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

помоћу формуле левих правоугаоника, трапезне формуле и Симпсонове формуле. Оценити грешку добијених приближних вредности.

Решење. Приметимо да на овај интеграл не можемо применити Њутн-Лајбницову формулу. Нека је $x_i = ih$, $i = 0, ..., 10$, где је $h = 0.1$ и $f(x) = e^{-x^2}$. Примењујући формуле (15), (17) и (18) добијамо:

$$I_P = 0.7781682,$$

$$I_T = \frac{0.1}{2}(1 + 0.3678794 + 2 \cdot 0.6781682) = 0.7462108,$$

$$I_S = \frac{0.1}{3}(1 + 0.3678794 + 4 \cdot 3.7402663 + 2 \cdot 3.0379019) = 0.7468249.$$

Анализом израза за изводе,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}, \quad f^{IV}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$$

уочавамо да је

$$M_1 = |f'(\frac{1}{\sqrt{2}})| = 0.858, \quad M_2 = |f''(0)| = 2, \quad M_4 = |f^{IV}(0)| = 12,$$

што у складу са оценама грешке даје

$$|E(I_P)| \leq \frac{(1-0)^2}{2 \cdot 10} \cdot 0.858 = 0.0429,$$

$$|E(I_T)| \leq \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 2 = 0.0016667,$$

$$|E(I_S)| \leq \frac{(1-0)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 12 = 0.0000067.$$

Добијене оцене указују да Симпсонова формула има знатно мању грешку у односу на формуле правоугаоника и трапеза.

Пример 2. Симпсоновом формулом израчунати са тачношћу $5 \cdot 10^{-6}$ приближну вредност интеграла

$$\int_1^2 (1 + lnx)\ dx.$$

Решење. За функцију $f(x) = 1 + lnx$ је $f^{IV}(x) = -6x^{-4}$, те је $M_4 = 6$. Да би била задовољена дата грешка на основу (18) мора да важи

$$\frac{6}{2880m^4} \leq 5 \cdot 10^{-6},$$

што важи за $m \geq 5$, тј. $n \geq 10$. Узмимо $n = 10$ и применимо уопштену Симпсонову формулу (18) са кораком интеграције $h = 0.1$. Добијамо

$$\int_1^2 (1 + lnx)\ dx = 1.38629 \pm 0.00001.$$

Приметимо да се овај интеграл може експлицитно решити, тј. да је $\int (1 + lnx)\, dx = xlnx + C$, те је тачна вредност интеграла $\int_1^2 (1 + lnx)\ dx = 2ln2 = 1.38629$.

Наредни пример нам детаљно показује како одабиром чворова можемо утицати на степен тачности формуле.

Пример 3. Одредити коефицијенте $c_k,\ k = 0, 1, 2$, као функције од α тако да је формула

$$\int_{-1}^1 f(x)\ dx = c_0 f(-\alpha) + c_1 f(0) + c_2 f(\alpha) + R,\ 0 < \alpha \leq 1,$$

тачна за све полиноме степена три и нижег од три. Да ли постоји α за које је алгебарски степен тачности формуле једнак пет?

Решење. Да би формула била тачна за све полиноме нижег степена од три, она мора задовољавати следећи систем једначина (редом за $1,\ x,\ x^2$)

$$\begin{aligned} 2 &= c_0 + c_1 + c_2, \\ 0 &= c_0(-\alpha) + c_2\alpha, \\ \frac{2}{3} &= c_0\alpha^2 + c_2\alpha^2. \end{aligned}$$

Решавањем система добијамо $c_0 = c_2 = \frac{1}{3\alpha^2}$ и $c_1 = 2\big(1 - \frac{1}{3\alpha^2}\big)$. Приметимо да смо ове коефицијенте, сагласно *Теореми 2.6.* и рачунању коефицијената интерполационе квадратурне формуле, могли да добијемо и као

$$c_0 = \int_{-1}^1 \frac{x(x-\alpha)}{2\alpha^2}\ dx,\ \ c_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - \alpha^2}{-\alpha^2}\ dx,\ \ c_2 = \int_{-1}^1 \frac{x(x+\alpha)}{2\alpha^2}\ dx,$$

где рачунањем добијамо исте вредности коефицијената. Дакле тражена формула је

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \frac{1}{3\alpha^2}\Big(f(-\alpha) + 2(3\alpha^2-1)f(0) + f(\alpha)\Big) + R,$$

и она је за свако α тачна и за $f(x) = x^3$ (у шта се уверавамо непосредном провером). За $f(x) = x^4$ је

$$R = \int_{-1}^{1} x^4\ dx - \frac{1}{3\alpha^2}(\alpha^4+\alpha^4) = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{5} - \alpha^2\Big) = 0, \ \text{ за } \ \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Како је за $f(x) = x^5$ грешка $R = 0$ за свако α, а за $f(x) = x^6$ грешка $R \neq 0$ за $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$, следи да је изведена квадратурна формула алгебарског степена тачности $5 = 2 \cdot 3 - 1$ за $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Приметимо и да је 5 уједно и максималан алгебарски степен тачности ове формуле за три чвора, и да је самим тим формула за $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ Гаусова и гласи

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \frac{1}{9}\Big(5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\Big) + R. \tag{26}$$

Напомена: За $\alpha = 1$ добијамо основну Симпсонову формулу (10)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \frac{1-(-1)}{6}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) + R.$$

Сада ћемо навести примере неких ортогоналних полинома.

Лежандрови полиноми

Лежандрови полиноми, дефинисани са

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \ \ n = 0, 1, ...$$

су ортогонални у односу на тежинску функцију $p(x) = 1$ на одсечку $[-1, 1]$. За Лежандрове полиноме важи рекурентна релација

$$L_i(x) = \frac{(2i-1)x}{i} L_{i-1}(x) - \frac{i-1}{i} L_{i-2}(x), \ \ i = 2, ..., n \tag{27}$$

и $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$. Специјално добијамо

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \ \ L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \ \text{ итд.}$$

Пример 4. Одредити параметре Гаусове квадратурне формуле облика

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3).$$

Решење. Како је у овом случају тежинска функција $p(x) = 1$, одсечак $[-1, 1]$ и алгебарски степен тачности максималан, према *Теореми 2.8.* x_1, x_2 и x_3 су нуле Лежандровог полинома $L_3(x)$, тј.

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Према формули (24) коефицијенте A_k одређујемо као

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} x\Big(x - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\ dx = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \int_{-1}^{1} -\frac{5}{3}\Big(x^2 - \frac{3}{5}\Big)\ dx = \frac{8}{9}.$$

Слично, $A_2 = \frac{5}{9}$. Наравно, добили смо исте параметре као параметре из формуле (26) из *Примера 3.*, само што је формула (26) изведена решавањем система једначина, а ова из теорије ортогоналних полинома.

Приметимо из рекурентне формуле (27) да ако је L_{i-1} непарна функција, а L_{i-2} парна функција, онда је L_i парна функција. Такође, ако је L_{i-1} парна функција, а L_{i-2} непарна функција, онда је L_i непарна функција. Уз то да је L_0 парна, а L_1 непарна функција, закључујемо да је L_i парна функција ако је i парно, а непарна ако је i непарно. Стога за нуле Лежандрових полинома важи $x_k = -x_{n-k+1}$, и самим тим за коефицијенте A_k (24) важи

$$A_k = A_{n-k+1} \ \ \Big(k = 1, ..., \Big[\frac{n}{2}\Big]\Big).$$

Отуда је и $A_2 = A_0$ у претходном примеру. У следећој табели дате су вредности корена првих пет Лежандрових полинома, као и одговарајућих коефицијената рачунатих по формули (24).

n	k	x_k	A_k
1	1	0.	2.
2	1,2	$\mp$0.57735027	1.
3	1,3	$\mp$0.77459667	0.55555556
	2	0.	0.88888889
4	1,4	$\mp$0.86113631	0.34785488
	2,3	$\mp$0.33998104	0.65214516
5	1,5	$\mp$0.90617985	0.23692688
	2,4	$\mp$0.53846931	0.47862868
	3	0.	0.56888889

Пример 5. Примењујући Лежандрове полиноме израчунати интеграл

$$\int_0^{\pi/2} sint\, dt.$$

Решење. Сменом $t = \frac{\pi}{4}(x+1)$, дати интеграл се своди на $I = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4} sin\frac{\pi}{4}(x+1)\, dx$. Дакле,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} sin\frac{\pi}{4}(x+1),\ p(x) = 1.$$

Рачунајући интеграле редом за n =1, 2 и 3 и користећи се претходном таблицом за Лежандрове полиноме добијамо

$$I_1 = A_1 f(x_1) = 2 \cdot f(0) = 1.11072,$$

$$I_2 = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = 1 \cdot f(-0.577350) + 1 \cdot f(0.577350) = 0.99847,$$

$$I_3 = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) = 1.00001.$$

Приметимо да је тачна вредност интеграла $I = cos(0) = 1$.

Напомена: Интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$, сменом $x = [a+b+(b-a)t]/2$ трансформишемо у интеграл са границама -1 и 1, тј.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b+(b-a)t}{2}\right) dt.$$

На интервалу $[-1, 1]$ можемо примењивати и Чебишевљеве полиноме.

Чебишевљеви полиноми

Чебишевљеви полиноми, дефинисани са

$$T_n(x) = 2^{1-n} cos(n\, arccosx),\ n = 0, 1, .. \tag{28}$$

су на одсечку $[-1, 1]$ ортогонални са тежином $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. За Чебишевљеве полиноме важи рекурентна релација

$$T_i(x) = 2xT_{i-1}(x) - T_{i-2}(x),\quad i = 2, ..., n, \tag{29}$$

и $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$. Специјално добијамо

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\quad T_3(x) = 4x^3 - 3x \text{ итд.}$$

Из израза (28) видимо да су нуле полинома $T_n(x)$

$$x_k = cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k = 1, ..., n,$$

док се за коефицијенте A_k може показати да су једнаки и да износе $A_k = \frac{\pi}{n}$, $k = 1, ..., n$. Стога Гаусова формула (21) има облик

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\ dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{30}$$

за претходно наведене x_k.

Пример 6. Извести квадратурну формулу

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\ dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$$

Решење. Сменом $x = \frac{(1+t)}{2}$ интервал $[0, 1]$ пресликавамо у интервал $[-1, 1]$ и интеграл постаје

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\ dx = \int_{-1}^{1} \frac{f((1+t)/2)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt.$$

Ако ставимо $g(t) = f((1+t)/2)$ применом формуле (30) добијамо

$$\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1+cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right),$$

чиме је задатак завршен.

Лагерови полиноми

Лагерови полиноми,

$$P_n(x) = e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \ \ n = 0, 1, ...$$

су на интервалу $[0, +\infty)$ ортогонални са тежином $p(x) = e^{-x}$. За $n = 0, 1, 2, 3$ добијамо редом полиноме

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x+1$, $P_2(x) = x^2-4x+2$, $P_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6$.

Таблица чворова и тежина Лагерових полинома:

n	x_i	A_i
2	0.585786	0.853553
	3.41421	0.146447
3	0.415775	0.711093
	2.29428	0.278518
	6.28995	0.0103893
4	0.322548	0.603154
	1.74576	0.357419
	4.53662	0.0388879
	9.39507	0.000539295

Пример 7. Применом ортогоналних полинома израчунати приближну вредност интеграла

$$I = \int_0^{+\infty} ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Решење. С обзиром на границе интеграције применићемо Лагерове ортогоналне полиноме.

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, e^x\, ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x),$$

где је

$$f(x) = e^x\, ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

За $n = 3$, из претходне таблице видимо чворове интеграције који су нуле полинома $P_3(x)$, а то су $x_1 = 0.415775$, $x_2 = 2.29428$, и $x_3 = 6.28995$. Одговарајуће тежине су $A_1 = 0.711093$, $A_2 = 0.278518$ и $A_3 = 0.0103893$. Према томе избором три чвора добија се

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) = -2.287881.$$

Тачна вредност интеграла је $-\frac{\pi^2}{4} \approx -2.467401$ ([3]).

Хермитови полиноми

Хермитови полиноми, дефинисани са

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \;\; n = 0, 1, ...$$

су на интервалу $(-\infty, +\infty)$ ортогонални са тежином $p(x) = e^{-x^2}$. Хермитови полиноми имају примену у вероватноћи, комбинаторици, и нпр.

у физици где дају стања линеарног квантног хармонијског осцилатора. Слично као и за Лежандрове полиноме и за Хермитове важи $A_k = A_{n-k+1}$. Неке вредности за x_k и A_k дате су у следећој табели.

n	k	x_k	A_k
1	1	0.	1.77245385
2	1,2	$\mp$0.70710678	0.88622693
3	1,3	$\mp$1.22474487	0.29540898
	2	0.	1.18163590
4	1,4	$\mp$1.65068012	0.08131284
	2,3	$\mp$0.52464762	0.80491409

4. MATLAB додатак

Софтверски пакет *MATLAB* представља незаобилазни професионални алат за нумеричка и научна израчунавања и поседује велики број имплементираних нумеричких метода. Самим тим *MATLAB* омогућава далеко бржи долазак до решења него нпр. у традиционалним програмским језицима попут $C/C++$ и *Java*. Неке од тих већ доступних функција, а тичу се овог рада су:

Симпсонова интеграција :	$i = quad(f,\, a,\, b,\, tol);$
Трапезна интеграција :	$i = trapz(x,\, y);$
Гаус-Лобатова интеграција :	$i = quad1(f,\, a,\, b,\, tol);$
Симболичка интеграција :	$i = int(f,\, a,\, b);$

Функција *quad* интеграл рачуна адаптивном применом Симпсонове квадратурне формуле која је тачна за полиноме до трећег степена. Основни облик употребе ове функције је $q = quad(f,\, a,\, b,\, tol)$, где је f функција која се интеграли, a и b су границе интеграције, док је tol апсолутна грешка са којом се интеграл рачуна. Нпр. у *Примеру 1.* тражило се да се израчуна вредност интеграла $I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$. Позивом *quad* у *Matlabu*

```
quad('exp(-x.^2)',0,1) %. ispred ^ da se naznaci da je numericki izraz
```

добијамо

```
ans =

    0.7468  ,
```

што је исти резултат који смо добили као I_S у *Примеру 1.*
За *Пример 2.* позивамо

```
quad('1.+log(x)',1,2,5*10^(-6))
```

и добијамо

```
ans =

    1.3863  .
```

У функцији $trapz(x,\ y)$ x представља вектор чворова интеграције уопштеним трапезним правилом (17), док y представља вектор вредности подинтегралне функције f у тим чворовима. Сада ћемо у *Matlabu* израчунати вредност I_T из *Примера 1.* :

```
x=[0:0.1:1]; %x je vektor vrednosti od 0 do 1 sa razmakom 0.1 izmedju
y=exp(-x.^2); %primenjena funkcija na vektor x
z=trapz(x,y);
```

Matlab враћа вредност

```
z =

    0.7462  ,
```

која је иста као I_T из *Примера 1.*

Гаус-Лобатова квадратура се разликује од Гаус-Лежандрове у одабиру граничних чворова интеграције (она за њих узима -1 и 1 ако се ради о интервалу $[-1,1]$), док су остали чворови корени Лежандрових полинома. Параметри функције *quad*1 су исти као и у функцији *quad*.

С друге стране, функција $int(f, a, b)$ рачуна интеграл прво симболички. Нпр. за

```
int(sym('x*(sin(2*x))'),1,2); %sym kao konverzija u simbolicko
```

Matlab враћа

```
ans =

cos(2)/2 - cos(4) - sin(2)/4 + sin(4)/4   ,
```

где са

```
eval(ans)
```

добијамо нумеричку вредност

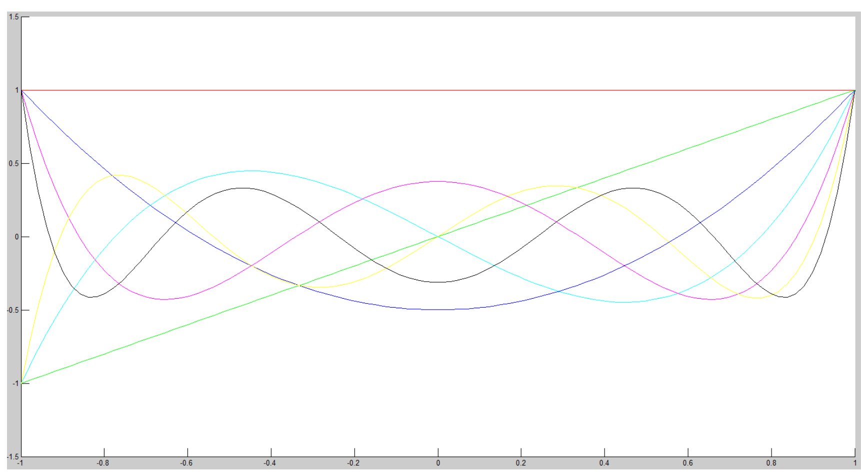
```
ans =

    0.0290   .
```

На самом крају излаже се *Matlab* код којим се конструишу Лежандрови полиноми и скицира график првих неколико истих.

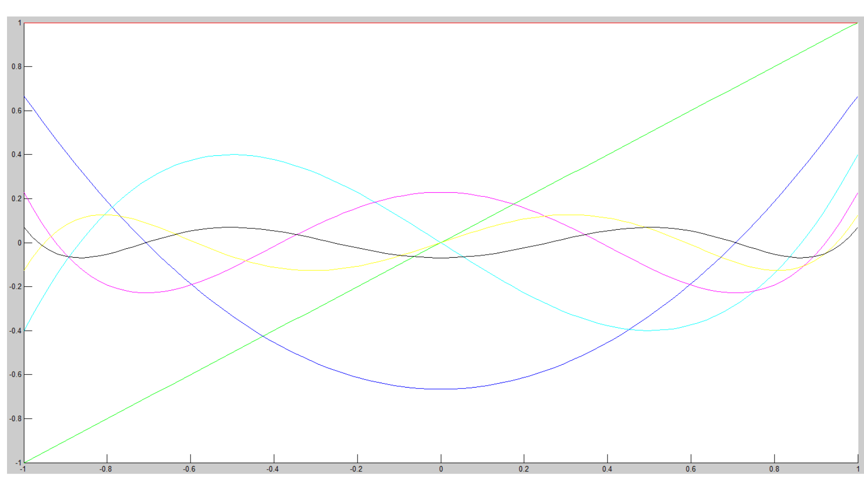
```
%ime fajla lp.m
function L = legendre_poly(n)
%L{i} je ustvari L_{i-1} iz rekurentne formule
L{1} = 1;
L{2} = [1 0]; %koeficijenti kao lista
%generisanje prema rekurentnoj formuli (27)
for i=2:n
    L{i+1}=((2*i-1)/i)*[L{i} 0]-[0 0 (i-1)/i*L{i-1}]; %takodje rad sa listom
end
```

```
%ime fajla lp1.m
L = legendre_poly(6)
X = linspace(-1,1);
colors='rgbcmyk';
hold on
for i = 1 : 7
  plot(X, polyval(L{i},X),colors(i)); %plotovanje grafika u bojama 'rgbcmyk'
end
```

Пуштањем фајла $lp1$ добијамо следећи график првих 7 Лежандрових полинома:



Мењањем рекурентне релације на Чебишевљеву (29) истим поступком добијамо график првих 7 моничних Чебишевљевих полинома:



5. Литература

[1] Др Градимир В. Миловановић, *Нумеричка анализа I део*, Научна књига, Београд, 1991.

[2] Др Градимир В. Миловановић, *Нумеричка анализа II део*, Научна књига, Београд, 1991.

[3] Раде П. Лазовић, *Нумеричке методе*, Факултет организационих наука, Београд, 2013.

[4] Десанка П. Радуновић, Александар Б. Самарџић, Филип М. Марић, *Нумеричке методе, збирка задатака кроз C, Fortran, и Matlab*, Академска мисао, Београд, 2005.

[5] *mathworld.wolfram.com*

[6] *www.mathworks.com*